erschienen in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2002, S.467-470, Hildesheim: Franzbecker

Christa KAUNE, Osnabrück

Unterschiede in den kognitiven Strukturen als Grundlage zur Erklärung von Unterrichtsbeiträgen

Der folgende Beitrag berichtet über einen Teil einer Untersuchung im Institut für Kognitive Mathematik der Universität Osnabrück, in der wir Eigenproduktionen aus dem gymnasialen Mathematikunterricht von Schülern mit kognitionstheoretischen Methoden analysieren (vgl. die Beiträge von Brinkschmidt & Armbrust, Cohors-Fresenborg & Striethorst, Griep und Sjuts in diesem Band).

Von Schülern einer Klasse 10, die nach dem Osnabrücker Curriculum (Cohors-Fresenborg) unterrichtet und in einer diskursiven Unterrichtskultur (Kaune 2001a, 2001b) erzogen wurden, war folgende Hausaufgabe (Cohors-Fresenborg, Kaune, Griep, S. 48f) zu bearbeiten:

Aufgabe 5.22: **In einem Topf befinden sich 2 rote, 3 blaue und 2 schwarze Kugeln. 2 Kugeln werden nacheinander ohne Zurücklegen gezogen.**

b) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Eigenschaften:

A: Beide Kugeln sind rot.
B: Beide Kugeln sind schwarz.
C: Beide Kugeln sind blau.
D: $A \vee B \vee C$
E: Eine Kugel ist rot und die andere blau
F: Die erste Kugel ist schwarz und die zweite Kugel rot.
G: $\overline{D}$

d) Wie lautet eine sprachliche Formulierung der Eigenschaft G?

Auf den ersten Blick sieht es so aus, als ob diese Aufgabe zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten im Zusammenhang mit mehrstufigen Experimenten aus einem beliebigen Schulbuch stammt. Während jedoch in der üblichen Schulmathematik die sogenannten Ereignisse durch Mengen, die ihrerseits durch Prädikate/Eigenschaften definiert werden, beschrieben werden, haben wir uns entschlossen, gleich diese Eigenschaften in einer naheliegenden formalen Repräsentation prädikatenlogisch zu beschreiben.

Im Anschluss an die Besprechung des Aufgabenteils b wird von Tim folgende Aussage angemerkt, die er jedoch als Frage versteht:

1 Also wir sollen ja die Gegeneigenschaft von D nehmen, und D, bei D sollen wir ja
2 A oder B oder C nehmen, wenn wir jetzt eine Gegeneigenschaft nehmen, müssen
3 wir ja, äm, D, E, F und G nehmen.

4 [*In der Klasse erhebt sich Gemurmel, nachdem Tim seine Frage gestellt hat.*]

Also nicht A oder B oder C.

Tims Fehlvorstellung des Prädikats „Gegeneigenschaft“ liegt (vermutlich) folgender Gedankengang zu Grunde: D ist als $A \vee B \vee C$ definiert. Damit ist die Gegeneigenschaft von D nicht die durch A und auch nicht die durch B und auch nicht die durch C bezeichnete Eigenschaft. Dann ist es also nicht die, die unter dem Namen A, und nicht die, die unter dem Namen B und auch nicht die, die unter dem Namen C in der Aufgabenstellung steht. Also sind es die Eigenschaften, die unter dem Namen D, E F und G stehen. Das „nicht“ in Zeile 5 bezieht Tim nicht auf das logische Gegenteil von $A \vee B \vee C$. Er bezieht es auf das Bezeichnende, nicht aber auf das Bezeichnete. Konsequenter Weise sind für ihn die Gegeneigenschaft einer Eigenschaft alle anderen Eigenschaften (dieses Zufallsexperiments).

Auf Tims Fehlvorstellung antworten sieben Schüler. Von fünf Schülern kennen wir aus den empirischen Untersuchungen (vgl. Brinkschmidt & Armbrust, in diesem Band) den von ihnen bevorzugten kognitiven Stil. Wir werden diese Kenntnis mit unseren Interpretationen verbinden.

Tim ruft zunächst Yasmin auf:

Ja, also, das ist nicht richtig, also man könnte da jetzt noch beliebig ähm Eigen-
schaften hinzufügen, dann könnte man auch sagen, das wären die Gegeneigen-
schaften, also das kann man nicht so sagen. Das ist nur, man muss äm, eben weil
die Eigen.. äm, die Eigenschaft D, äm, die Gegeneigenscha..geeigenschaft direkt,
äm eigenschaft D ist ja dann, also äm, wenn‘s nicht „A oder B oder C“ ist, und
dann äm sind‘s nicht automatisch die Anderen, sondern...eben nur das...

Yasmin hat die Vorstellung, dass die Gegeneigenschaft von E nur von E abhängt, also durch ein einstelliges Prädikat beschrieben werden kann. Bezogen auf das Experiment ist die Gegeneigenschaft nur von D und nicht von weiteren Eigenschaften, die sich der Beobachter noch anschaut, abhängig. Sie argumentiert indirekt: Wenn man zu diesem Experiment noch weitere Eigenschaften betrachten würde, dann wären diese nach Tims Auffassung ebenfalls bei der Gegeneigenschaft von D zu berücksichtigen. Sie greift deshalb den Hinweis von Tim auf, auf der formalen Ebene durch Negation von „A oder B oder C“ die Gegeneigenschaft von D zu definieren. Ein wichtiger Bestandteil einer prädikativen Problemlösung ist das Fassen des Problems mit adäquaten Begriffen. Yasmin weiß um die Wichtigkeit der passenden Begriffsumfänge für den Erfolg ihrer Denkprozesse und vermutet deshalb auch die Ursache für Tims Fehlvorstellung in der verkürzten Fassung des Begriffs Gegeneigenschaft in „alle anderen“ (Eigenschaften).

Obwohl Tim durch ein „Ach so, ja.“ Verständnis signalisiert, wählt er mit Markus einen Mitschüler für weitere Erklärungen aus, der genau wie er selbst eine eindeutige Vorliebe für eine funktionale Denkweise hat.

> Ja, äh, weiß nicht, vielleicht solltest du dir dann einfach so denken, dass wie äh, dass wie du das formulierst, so wie das jetzt in Aufgabenteil d ist, dass du denkst „Was sagt das denn?“, und das sagt ja praktisch, dass die Ballkugeln nicht gleichfa..., also die Ballkugeln, die du ziehst, nicht gleichfarbig sein soll‘n. Und dann guckst du da rein, und dann guckst, (was daraus zutrifft), und dann siehst du ja, dass ähm, zum Beispiel A trifft dann nicht darauf zu, also A, B und C kannst du nicht nehmen, und bei D ist das ja auch so, also kannst du E, F oder G nehmen. Und dann passt das wieder...

Markus schlägt vor, die formale Ebene zu verlassen und die in der Aufgabenstellung definierten Eigenschaften mit ihrer Bedeutung zu füllen, in einem weiteren Schritt dann auf der Sachebene den gegenteiligen Sachverhalt und danach auf einer Metaebene eine passende sprachliche Darstellung zu suchen. Dabei verweist er (Zeile 2) auf den Aufgabenteil d der Hausaufgabe, in dem ebenfalls nach einer umgangssprachlichen Formulierung der Eigenschaft G gefragt war. Bei seinen Äußerungen (Zeilen 5f) *„und dann guckst du da rein, und dann guckst, ... und dann siehst du“* bezieht er sich auf eine fiktive Durchführung des Experiments. Er hat vermutlich die Vorstellung, dass die Eigenschaften Filter sind, die die gewünschten Dinge herausfiltern. Er drückt aus (Zeilen 6 – 8), dass die hypothetischen Eigenschaften A, B, C, D nicht den gewünschten Effekt, nämlich nicht gleichfarbig zu sein, bringen, dass man sie deshalb *„nicht nehmen kann“*. Hier hat er vermutlich wieder die Vorstellung von Auswahlfiltern. Man muss andere nehmen *„und dann passt das wieder“* (Zeile 8). Markus empfiehlt also Tim, die Brauchbarkeit denkbarer Formeln an einer hypothetischen Durchführung eines Experimentes zu testen.

Alex, der überwiegend prädikativ denkt, aber bei einfacheren Aufgaben, zu deren Lösung eine funktionale Denkstruktur vorteilhaft ist, durchaus diese erfolgreich einsetzen kann, zeigt seine prädikative Denkstruktur wie folgt:

> Ja und überhaupt bei ‘ner Gegeneigenschaft ist ja, äh ‘ne Gegeneigeschaft also Eigenschaft trifft ja immer auf die Ergebnisse zu, ähm auf die die Eigenschaft selbst genau nicht zutrifft, und wenn man jetzt zu Eigenschaft D die Gegeneigenschaft nehmen soll, äm dann mhm muss man ja die Ergebnisse nehmen, auf die D nicht zutrifft, und nicht einfach äm alle anderen Eigenschaften, die in der Aufgabe vorkommen, sondern die Ergebnisse und nicht die Eigenschaft selber.

Alex argumentiert direkt, nicht indirekt wie seine beiden Vorredner. Er bezieht sich nicht auf die Ursache von Tims Fehlvorstellung, sondern zeigt, dass die Konsequenzen nicht konform mit dem im Unterricht bewiesenen Satz zum Berechnen der Wahrscheinlichkeit einer Gegeneigenschaft sind. Die Definition der Gegeneigenschaft ist nahezu druckreif formuliert (Zeilen 1 – 3), die verschiedenen Objekte: einmal die Ergebnisse eines Zufallsexperimentes und zum Anderen die Eigenschaften, die auf diese Ergebnisse zutreffen, sind sprachlich sorgfältig auseinander gehalten.

Auf ganz anderer Ebene argumentiert zum Abschluss Jan:

Dann auch wenn das **ginge**, also dass man jetzt als Gegeneigenschaft die anderen Eigenschaften wählt, hätte er, hat er das halt logisch nicht richtig gemacht, da er G mit einbezogen hat, und die Lösung von G soll die Lösung von G **und** E **und** F sein, dann müssten E und F null sein, damit das überhaupt funktioniert. Er hat, also die Lösung (*3 sec*) schon da das Ergebnis von der Lösung reinbezogen und das ist, [*schmunzelnd*] das geht ja nicht ineinander, dass er dann halt, G soll, bei G soll rauskommen, das da G und noch was Anderes von der Lösung ist. Und dann muss er ja G schon vorher wissen, um die Lösung von G zu haben. Und...nee [*schmunzelnd*] das...das geht nicht! Also auch **wenn** das jetzt **formal** ginge mit den, also ohne die Einwände die gerad' eben gesagt wurden, hat er ja G, dann müsste er die Lösung von G wissen, um die Lösung von G rauszukriegen ... also müsste er's schon vorher wissen. Und ...

Auch Jan, prädikativ klassifiziert, lässt sich auf Tims Fehlvorstellung ein, merkt aber an, dass Tims Vorgehensweise aus „logischen Gründen" nicht zulässig ist. Nach Tims Vorstellungen läßt sich G folgendermaßen äquivalent darstellen: $G :\leftrightarrow D \vee E \vee F \vee G$. Hier wird deutlich, was Jan in Zeile 2f meint: Die Definition von G ist zirkulär. Die Konsequenzen führt er auf der Ebene der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten vor (Zeile 4f), die er in seiner Argumentation schnell wieder verlässt, um sich wieder dem Selbstrückbezug zuzuwenden: *„Und dann muss er ja G schon vorher wissen, um die Lösung von G zu haben."* Dies Argument ist in seinen Augen auch schlagkräftiger als alle vorher genannten Einwände: *„Also auch **wenn** das jetzt **formal** ginge mit den, also ohne die Einwände die gerad' eben gesagt wurden, hat er ja G, dann müsste er die Lösung von G wissen, um die Lösung von G rauszukriegen ... also müsste er's schon vorher wissen."*

Dass er in seiner Argumentation eine andere Ebene benutzt als seine Vorredner, ist ihm schon bewußt, ebenfalls die Korrektheit seiner Argumentation und die logische Komplexität seiner Argumentation.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E. (2001): Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation: das Osnabrücker Curriculum. *Der Mathematikunterricht*, 47, Heft 1, S. 5-13.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. & Griep, M. (1994): Rechnen mit dem Ungewissen. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Kaune, C. (2001a): Merkmale eines konstruktivistischen Unterichtsskripts und eine Analyse dazugehöriger Lehr- und Lernprozesse. *Der Mathematikunterricht*, 47, Heft 1, S. 35-46.

Kaune, C. (2001b): Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts: Die kognitionsorientierte Aufgabe ist mehr als die „etwas andere Aufgabe". *Der Mathematikunterricht*, 47, Heft 1, S. 35-46.

Schwank, I. (1996): Zur Konzeption prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Jahrgang 28, Heft 6, S. 168 - 183