Übersetzung von
Developing Metacognitive and Discursive Activities in Indonesian Maths Teaching –
Results of a feasibility study. Erschienen in *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education* (IndoMS –JME) 3(1) 2012.

ENTWICKLUNG METAKOGNITIVER UND DISKURSIVER AKTIVITÄTEN IM INDONESISCHEN MATHEMATIKUNTERRICHT

Ergebnisse einer Machbarkeitsstudie

Christa Kaune, Elmar Cohors-Fresenborg (Institut für Kognitive Mathematik, Universität Osnabrück, Germany), Edyta Nowinska (Institute MATHESIS, Pyzdry, Poland), Yansen Marpaung, Novi Handayani (Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta)

Abstract

Es wird über die Ergebnisse einer deutsch-indonesischen Machbarkeitsstudie berichtet. Mit ihr sollte geprüft werden, ob eine breiter angelegte Pilotstudie erfolgreich sein kann, bei der eine Erhöhung der mathematischen Kompetenzen von indonesischen Schülern1 in Klasse 7 dadurch erreicht werden soll, dass mehr Schüler die im Mathematikunterricht erarbeiteten Konzepte und Verfahren verstehen.
Dazu wurde eine Lernumgebung zur Einführung der ganzen Zahlen konzipiert und bei deren Implementation ein Unterrichtsskript praktiziert, das vermehrt metakognitive und diskursive Aktivitäten bei den Schülern evoziert.
In diesem Papier werden der theoretische Hintergrund für die Konstruktion eines Vergleichstests dargelegt, einige Aufgaben exemplarisch vorgestellt und an Hand von Schülereigenproduktionen aus dem Vergleichstest Effekte des innovativen Unterrichts gezeigt.

Abstrak

Dalam artikel ini kami melaporkan proyek penelitian desain Jerman-Indonesia yang bertujuan untuk meningkatkann kemampuan matematika siswa di sekolah menengah secara signifikan. Sebagai hasil dari studi banding internasional menunjukkan bahwa hubungan antara metakognisi dan pembelajaran adalah lingkungan belajar untuk instruksi dasar di kelas 7 dirancang untuk meningkatkan kegiatan metakognitif dan diskursif pelajar dan guru dengan jelas. Efektivitas pendekatan ini diuji dalam beberapa kali sekolah menengah.
Dalam tulisan ini, latar belakang teoritis untuk pembangunan lingkungan pembelajaran disajikan, beberapa tugas disajikan sebagai contoh dan analisis produksi mahasiswa dari pelajaran proyek.

Keywords: Metakognition, Mikrowelten, grundlegende Modellvorstellungen, Metaphern, ganze Zahlen

EINLEITUNG

Vom 01.10.2009 bis zum 31.12.2010 wurde eine gemeinsame Machbarkeitsstudie (feasibility study) von Mathematikdidaktikern an der heutigen Universitas Sanata Dharma (Yogyakarta) und der Universität Osnabrück mit Namen „Entwicklung metakognitiver und diskursiver Aktivitäten im indonesischen Mathematikunterricht (MeDIM)“ durchgeführt. Es sollte geprüft werden, ob eine breiter angelegte Pilotstudie erfolgreich sein kann, bei der die Erhöhung der mathematischen Kompetenzen von Schülern in Klasse 7 von indonesischen Sekundarschulen dadurch erreicht werden soll, dass ein größerer Anteil der Schüler die im Mathematikunterricht erarbeiteten mathematischen Konzepte und Verfahren wirklich versteht. In der Pilotstudie soll in den Versuchsklassen eine Unterrichtskultur etabliert werden, bei der zwei Aspekte zentral sind:

[1] Im Folgenden ist aus Gründen der besseren Lesbarkeit von Schülern bzw. von Lehrern die Rede, damit sind stets Schülerinnen und Schüler bzw. Lehrerinnen und Lehrer gemeint.

- Vorrang für den Aufbau von tragfähigen Modellvorstellungen (über den Umgang mit Zahlen und algebraischen Umformungen) vor dem Vermitteln von Sachwissen und Einüben von Rechentechniken,
- Steigerung der metakognitiven und diskursiven Aktivitäten im Unterricht.

Die Machbarkeitsstudie war darauf ausgerichtet, sowohl das Implementationsdesign als auch das Evaluationsdesign der Pilotstudie zu überprüfen. Im Folgenden wird der Schwerpunkt auf das Evaluationsdesign und die Ergebnisse dessen Analyse gelegt. Mit den Ergebnissen der Evaluation sind Wirkungen der konzipierten Maßnahmen (Unterrichtsinhalte und Unterrichtsmethoden) auf die Lehr-Lernergebnisse gemeint. In dem Evaluationsdesign nimmt die Versuchsklasse die Rolle zukünftiger Projektklassen ein.

DURCHFÜHRUNG UND ERGEBNISSE DER MACHBARKEITSSTUDIE

Über die mathematikdidaktische Konzeption, den theoretischen Hintergrund der Konstruktion einer Lernumgebung (vgl. Kaune & Cohors-Fresenborg, 2011), einige exemplarisch ausgewählte Aufgaben und Schülereigenproduktionen aus dem Projektunterricht wird in (Kaune, Cohors-Fresenborg & Nowinska, 2011) berichtet. Damit ist auch das Design der zukünftigen Pilotstudie dokumentiert.

Die Lernumgebung wurde zu Beginn des Schuljahres 2010/2011 in einer Klasse 7 an einer Sekolah Menengah Pertama in Yogyakarta von einer dafür in Deutschland trainierten Lehrkraft erprobt. Im Rahmen der Machbarkeitsstudie wurde bei dieser Gelegenheit das Implementationsdesign untersucht und Einflussvariablen herausgearbeitet, die über den Erfolg der Implementation mit entscheiden.

Nach Abschluss der Implementation im Unterricht (26 Doppelstunden, jede 90 Minuten lang) wurde im August 2010 sowohl in der Experimentalklasse als auch in einer der Parallelklassen an derselben Schule ein Vergleichstest geschrieben. Es wurde bei der Durchführung des Vergleichstest darauf geachtet, dass in beiden Klassen zum Zeitpunkt der Erhebung des Lernstandes die gleiche Anzahl an Mathematikstunden unterrichtet worden war. Das bedeutet, dass die Schüler der Versuchsklasse im großen Umfang Inhalt und Trainingsaufgaben erhalten haben, die auf dem ersten Blick nicht Gegenstand des indonesischen Curriculums sind. Sie haben andererseits wesentlich weniger Zeit zur Anwendung von Rechentechniken gehabt.

Konstruktion der Test-Aufgaben

Mit dem Vergleichstest sollten in vielfältiger Weise die Kompetenzen der Schüler beim Rechnen mit ganzen Zahlen überprüft werden. Darüber hinaus war von großem Interesse, ob und inwieweit die Schüler beim Rechnen die ihnen durch das Schulbuch angebotenen Modellvorstellungen nutzen. Zusätzlich wurde ihre Kompetenz bei zentralen mathematischen Tätigkeiten überprüft, die auch außerhalb des Bereiches „Umgang mit ganzen Zahlen“ für wichtig gehalten werden. Dabei handelt es sich um die Fähigkeit des Einsetzens von Zahlnamen und Termen für Variable in Rechengesetze, das Befolgen von Syntaxregeln beim Aufschreiben eines mathematischen Ausdrucks, das Verständnis der Schüler von der Bedeutung der unterrichteten Rechengesetze.

Die Aufgaben mussten so konstruiert werden, dass sie auch mit dem Wissen der Schüler der Parallelklasse zu bearbeiten waren. Somit waren jegliche Hinweise auf die Spezifika der konstruierten Lernumgebung (das Vertragswerk zum Rechnen mit ganzen Zahlen, insbesondere auch Anforderungen, lückenlos vertragskonform zu rechnen oder einen neuen, bisher nicht bekannten mathematischen Satz zu beweisen), zu vermeiden.

Es wurde ein Test mit 5 Aufgaben konzipiert, die ganz unterschiedliche Anforderungen an die Schüler stellen. Die Testzeit war eine Unterrichtsstunde (45 Minuten).

Aufgabe 1 bestand aus vier technischen Aufgaben, bei denen es zunächst auf das fehlerfreie Rechnen, also auf das richtige Rechenergebnis ankam:

1. Berechne.
    a. ((-24) + (-34)) = b. ((4 + (-9)) + 16) =
    c. (((-25) + 175) + 25) = d. ((123 + (-23)) – 100) =

Mit der zweiten Aufgabe wurde abgetestet, ob der Prozess des Einsetzens von Zahlen für Variable durchgeführt werden kann.

2. Du kennst das Kommutativgesetz: (a + b) = (b + a)
    a. Setze für a = (-25) und für b = 15 ein.
    b. Setze für a = 16 und für b = (-30) ein.

Mit der dritten und vierten Aufgabe sollten zwei Aspekte überprüft werden: die Kompetenz zum Argumentieren und die Tragfähigkeit von Modellvorstellungen zum Umgang mit ganzen Zahlen, wenn Erklärungen für folgende mathematische Sachverhalte geschrieben werden sollten:

3. Schreibe eine Erklärung auf, warum (0 + a) = a ist.
4. Ein Schüler hat vergessen, was die Gegenzahl von (-17) ist. Er überlegt, ob es 17 oder (- (-17)) ist. Was meinst du dazu?

Im Aufgabenteil a der fünften Aufgabe soll die Technik des Formalisierens überprüft werden, im Aufgabenteil b hingegen die Anwendung eines mathematischen Gesetzes.

5. Es gibt eine Beziehung zwischen der Subtraktion und der Addition. Wenn wir von einer Zahl eine zweite Zahl subtrahieren, können wir auch zu der ersten Zahl die Gegenzahl der zweiten Zahl addieren.
    a. Schreibe dieses Wissen mit Variablen auf.
    b. Ergänze: ((-30) – 15) = ...

Hypothesen und Ergebnisse

In der Versuchsklasse nahmen 29 Schüler, in der Kontrollklasse 28 am Test teil. Bei der geringen Anzahl von involvierten Klassen und getesteten Schülern ist eine detaillierte statistische Auswertung nicht sinnvoll. Deshalb wird vermehrt auf die Interpretation der Schülereigenproduktionen gesetzt, um das Erreichte bzw. Erreichbare zu verdeutlichen. Bei einigen der im Folgenden formulierten Hypothesen lässt sich in der zukünftigen Pilotstudie auch nahe liegendes statistisches Instrumentarium anwenden, um die statistische Signifikanz quantitativer Aussagen zu überprüfen.

Hypothese 1: Schüler der Versuchsklassen rechnen erfolgreicher mit ganzen Zahlen als Schüler der Kontrollklasse

Zur Überprüfung der Hypothese ziehen wir die Bearbeitungen von Aufgabe 1 heran. Als erstes wurde überprüft, ob sich beide Gruppen bezüglich der Anzahl an richtigen Rechenergebnissen unterscheiden.

Die 29 Schüler der Versuchsklasse konnten maximal 29 mal 4, also 116 Teilaufgaben richtig lösen. Der erreichte Wert lag bei 96 (von 116) Teilaufgaben, also bei 82,76 % der maximal möglichen richtig gerechneten Teilaufgaben. Die 28 Schüler der Kontrollklasse hätten maximal 28 mal 4, also 112 Teilaufgaben richtig bearbeiten können. Richtig gelöst wurden 77 von den maximal möglichen 112 Teilaufgaben, also 68,75 % . Bei jeder einzelnen Teilaufgabe erreichten die Schüler der Versuchsklasse einen höheren Mittelwert als die Schüler der Kontrollklasse.

Bei der zukünftigen Pilotstudie ist zu erwarten, dass analoge Leistungsunterschiede auftreten, die sich als signifikant erweisen werden.

Ziel von Mathematikunterricht sollte es sein, dass Schüler nicht nur erfolgreich rechnen, sondern dass sie auch begründen können, wie sie zu ihrem Rechenergebnis gekommen sind. Im Design der Lehr-Lern-Umgebung im Projekt MeDIM hatte die Erziehung zum Begründen einen hohen Stellenwert. Bei der Konstruktion des Testes wurden zwar keine expliziten Begründungen für Rechnungen verlangt. Trotzdem bieten viele Schüler von sich aus eine zusätzliche Begründung für die von ihnen durchgeführten Rechnungen an. Hierbei sind zwei Arten zu unterscheiden: Es werden einerseits schlichte Merkregeln zitiert, andererseits kann auch der Bezug zu Grundvorstellungen oder Mirkowelten eine Begründung darstellen. Wir untersuchen zunächst den ersten Fall.

Hypothese 2: Schüler der Versuchsklasse begründen häufiger unaufgefordert ihre Rechnungen durch Angabe von Merkregeln als Schüler der Kontrollklasse.

Auch zur Überprüfung dieser Hypothese werden die Lösungen der Aufgabe 1 herangezogen.

In der Kontrollklasse wurde in vier der 112 Aufgabenteilen (4 %) ein Hinweis auf eine Begründung für den eingeschlagenen Rechenweg gegeben.

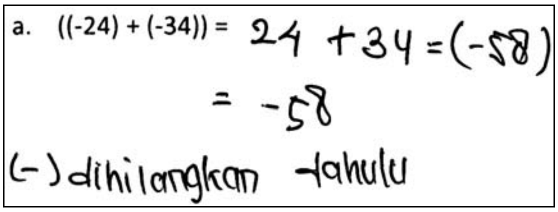

Abb. 1: Hinweis auf eine verwendete Merkregel in der Kontrollklasse

[Erst lassen wir (-) weg.]

In der Versuchsklasse werden zu 29 von 116 Aufgabenteilen (25 %) Begründungen angegeben. In sieben Fällen (6 %) wurden Kurzfassungen von Merkregeln notiert, die nie Thema des Projektunterrichts waren. Abbildung 2 zeigt eine korrekte Rechnung des Aufgabenteils 1a mit einer eigenen Kurzform der Merkregel „Die Summe zweier negativer Zahlen ist eine negative Zahl."

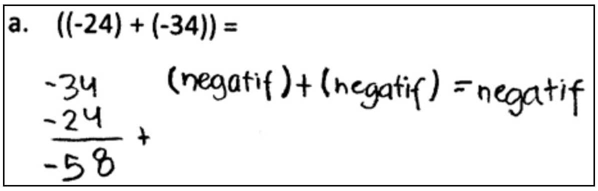

Abb. 2: Hinweis auf eine verwendete Merkregel in der Versuchsklasse

Wir erklären uns dies so: Das Verwenden von schlichten Merkregeln ist ein typischer Bestandteil des Mathematikunterrichts. Im Projektunterricht wurden solche schlichten Merkregeln von der Lehrkraft nicht angeboten. Die im Test gefundenen deuten also darauf hin, dass sich die Schüler solche schlichten Merkregeln selbst konstruiert haben. Auch die mathematische Qualität der zitierten Merkregeln und ihre Darstellungen unterschieden sich in beiden Klassen.

Die Tatsache, dass Schüler der Projektklasse unaufgefordert durch die Aufgabenstellung eine Begründung oder einen Kommentar zu eigenen Rechnung abgeben, ist ein Indiz für die geänderte Unterrichtskultur. Die Schüler sollen verstärkt zu metakognitiven Aktivitäten angeregt werden. Dazu gehört Kontrolle eigener Denkprozesse und Reflexion über eigene Denkprozesse.

Bei der zukünftigen Pilotstudie ist zu erwarten, dass analoge Unterschiede auftreten, die sich als signifikant erweisen werden.

Wie von Kaune, Cohors-Fresenborg & Nowinska (in diesem Band) dargelegt, wurde beim Design der Lehr-Lern-Umgebung im Projekt MeDIM der Schwerpunkt darauf gelegt, durch das Angebot von geeigneten Mikrowelten den Aufbau von tragfähigen Modellvorstellungen über den Umgang mit Zahlen und algebraischen Umformungen zu unterstützen. Die Modellvorstellungen sollen für Lernende zu einem Hilfsmittel für einen verständigen Umgang mit mathematischen Sachverhalten werden.

Zunächst wurden im Unterrichtsgang Erfahrungen der Schüler mit Schulden und Guthaben und ihr intuitives Wissen über den Umgang mit Schulden und Guthaben zu einem Metaphernsystem „vertragsgemäßes Rechnen“ ausgebaut. Das Metaphernsystem bildet den Kern der ersten Mikrowelt, in der sich Lernende mathematische Sachverhalte zurechtlegen können. Diese Mikrowelt wurde zu einer zweiten ausgebaut, indem der Prozess der Rekonstruktion des vorhandenen intuitiven Wissens der Lernenden im Unterricht behandelt wurde. Als Ergebnis erfolgte dann eine normative Festsetzung der Erfahrungen in einem Vertragswerk (Axiomensystem).

Eine dritte Mikrowelt ist ein Bewegungsspiel, in dem Handlungen an Spielfiguren auf einer Zahlenlinie durchgeführt werden müssen.

In der Kontrollklasse werden keine Mikrowelten bereitgestellt, sondern es werden nur aus dem vermeintlichen Alltag der Schüler Beispiele für das Auftreten negativer Zahlen genannt. Diese dienen zwar zur Motivation der Einführung von ganzen Zahlen und ihrer Schreibweise, aber sie erlauben eben nicht den Aufbau von tragfähigen Grundvorstellungen, mit deren Hilfe man sich zurechtfinden kann.

Hypothese 3: Schüler der Kontrollklasse beziehen sich in ihren Rechnungen fast nicht auf die im Schulbuch oder im Unterricht angebotenen Einführungsbeispiele, dagegen nutzen Schüler der Versuchsklasse häufiger die angebotenen Mikrowelten, um sich die mathematischen Sachverhalte zurecht zu legen.

Auch zur Überprüfung der dritten Hypothese werden wieder die Lösungen der Aufgabe 1 herangezogen. Bei der Formulierung der Aufgabenstellung wurde darauf geachtet, dass kein sprachlicher Bezug zu einer der Mikrowelten vorgegeben, bzw. nahe gelegt wurde.

In der Kontrollklasse waren keine Bezüge zu Mikrowelten zu erwarten. Aber in den Schülerlösungen wurde schon nicht einmal in einer einzigen Bearbeitung eines Aufgabenteils ein Hinweis auf eine aus dem Schulbuch oder dem Unterricht behandelte Grundvorstellung (Temperaturen, Skalen) gefunden. Das zeigt, dass die Schüler diese Angebote nicht als hilfreich empfunden haben.

Ganz anders stellt sich die Situation in der Versuchsklasse dar:

In insgesamt 22 (von 116) Aufgabenteilen (19 %) machten die Versuchsschüler in ihren Rechnungen Anmerkungen, die auf eine Nutzung der angebotenen Modellvorstellungen hinwiesen. Ob und wie viele weitere Schüler eine Mikrowelt nutzen, die aber keinen Hinweis in ihren Rechnungen dazu gaben, kann nicht abgeschätzt werden. Hier wäre für spätere Untersuchungen eine andere Erhebungsmethode erforderlich: ein Interview oder ein Fragebogen.

Analyse von Schülerlösungen mit Bezügen zu Mikrowelten

In den Schülerlösungen finden sich Bezüge zu den drei Mikrowelten „Buchen“, „Vertragswerk“ und „Bewegungsspiel“.

In der Versuchsklasse wird neunmal eine Rechnung mit einem Bezug zur Mikrowelt „Buchen“ begründet. Ein erstes Beispiel für eine korrekte Berechnung des Terms in Aufgabenteil a mit einer semiformalen Notation in der Begründung des Ergebnisses in der Mikrowelt „Buchen“ ist das folgende:

((-24) + (-34)) = -58
krn Utang 24 + Utang 34 = Utang 58

Abb. 3: Panta begründet ihr Ergebnis in der Mikrowelt „Buchen“.

[Weil Soll 24 + Soll 32 = Soll 58]

Auch die Bearbeitung von Bella zeigt, dass sie sich beim Rechnen den mathematischen Sachverhalt in der Mikrowelt „Buchen“ zurechtgelegt hat. Ihre Rechnung ist syntaktisch nicht korrekt. Vermutlich will sie ausdrücken: „Alles als Schulden rechnen: 24 + 34 = 58“.

Hitunglah.
((-24) + (-34)) = -58
utang 24 + 34 = 58

Abb. 4: Hinweis auf die Modellwelt „Buchen“

Sehr viel Schreibarbeit und auch Bearbeitungszeit verwendet Dian, um im Aufgabenteil c sein Ergebnis ebenfalls in der Mikrowelt „Buchen“ durch Angabe einer zum Term passenden Buchungsgeschichte zu begründen:

d. ((123 + (-23)) – 100) = 0
jadi dia pertama nya punya uang Rp 123 terus dia -
dapet setoran Debet/hutang sebanyak Rp 23 jadi = (123 + (-23)) = 10
terus setelah itu ia mengambil uang nya sebanyak .
Rp100 jadi ia pertamanya habis mbayar utang terus uang nya
tgl. Rp 100 . terus ia mengambil uang sebanyak Rp 100 jadi
uang nya Rp 0 deh....

Abb. 5: Begründung für das Ergebnis in der Mikrowelt „Buchen“

[Erst hat er Rp 123, danach zahlt er Soll Rp 23 ein, also = (123 + (-23)). Danach zahlt er Rp 100 aus. Also, nachdem er das Soll bezahlt hat, hat er Rp 100 übrig. Nun zahlt er Rp 100 aus. Damit hat er Rp 0...]

Im Folgenden soll dieser Schülerkommentar daraufhin analysiert werden, welchen Stellenwert der Bezug zu Geldbeträgen in seiner Lösung zu einer als rein technisch gestellten Rechenaufgabe hat.

Der Bezug auf Geldbeträge und deren Verbuchung kann für diesen Schüler nicht ein einfaches Aufrufen eines Anwendungsproblems sein, denn alle „Geldbeträge“, wie 123 Rp, 23 Rp und 100 Rp kommen im indonesischen Alltag nicht vor. Die Buchungswelt hat den Status einer Metapher übernommen, in der er sich auch Sachverhalte zurechtlegen kann, die keine direkte Entsprechung in der Realität haben.

Auffällig ist weiterhin, dass der Schüler versucht, lückenlos zu argumentieren. Nachdem er bereits den ganzen Term in der Buchungswelt erläutert hat, „Erst hat er Rp 123, danach zahlt er Soll Rp 23 ein, also = (123 + (-23)). Danach zahlt er Rp 100 aus.“, springt er noch einmal zurück und kommentiert in der Buchungswelt das Zwischenergebnis „Also, nachdem er das Soll bezahlt hat, hat er Rp 100 übrig.“ Danach argumentiert er von diesem aus weiter „Nun zahlt er Rp 100 aus. Damit hat er Rp 0...“

Beim Bezug von Mathematik zur Realität in dieser Schülerlösung geht es nicht darum, sich in dieser durch Verwendung von Mathematik besser zurecht zu finden, sondern die Erfahrung mit der Bewältigung von Realität wird als Metapher heran gezogen, um die jetzt für ihn neue, abstrakte Mathematik zu verstehen, wie im ersten Aufsatz (Kaune, Cohors-Fresenborg & Nowinska, in diesem Band) ausgeführt.

Die **Mikrowelt**, die in der Versuchsklasse am häufigsten beim Rechnen herangezogen wird, ist das **Vertragswerk zum Rechnen mit rationalen Zahlen**. Zwölfmal finden sich Hinweise darauf, wie beispielsweise in Abb. 4:

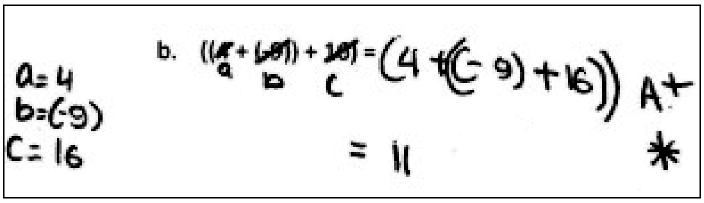

Abb. 6: Begründung des Ergebnisses durch vertragsgemäßes Rechnen

Im Kopf des Schülers Andre wird das Vertragswerk aufgerufen, zunächst das Assoziativgesetz. Die ganze Darstellung zeigt, dass in Andres Kopf wirklich der Paragraph A^+ (Assoziativgesetz der Addition) in der Form aufgerufen wird, so wie er im Unterricht verabredet wurde: da ist zunächst die Notation von a, b und c unter dem Term. Damit man ihn auf diese Gleichung anwenden kann, muss man eine Termersetzung machen. Diese ist im Unterricht als Paragraph * verabredet, Andre notiert auch diesen am rechten Rand. Am linken Rand nennt er die notwendigen Termersetzungen. Zusammengefasst zeigt seine Darstellung, dass Andre sich wirklich in der

Mikrowelt „Vertragswerk“ orientiert und nicht nur für einen Rechenschritt eine Begründung notiert.

Durch die Anwendung des Assoziativgesetzes kann Andre das positive Ergebnis von ((-9) + 16) leichter bestimmen als das negative Ergebnis des vorgegebenen Teilterms (4+(-9)).

In der Kontrollklasse wird bei der Bearbeitung des Aufgabenteils 1b nur einmal in 112 bearbeiteten Aufgabenteilen ein Hinweis auf den Einsatz eines Rechengesetzes gegeben.

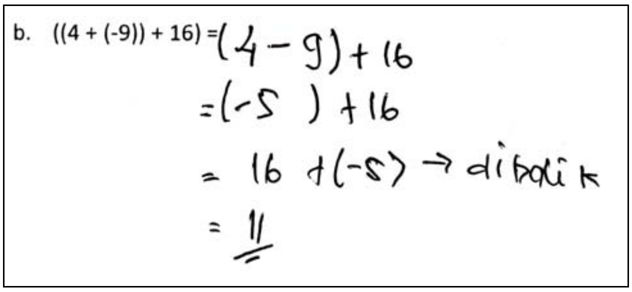

Abb. 7: Kommentierung des Einsatzes des Kommutativgesetzes in der Kontrollklasse (tauschen)

Hierbei handelt es sich um eine wenig elaborierte Beschreibung des Einsatzes des Kommutativgesetzes. Bei der Nennung handelt es sich nicht um den Rückgriff auf eine Mikrowelt, in der der Schüler den Status der „Rechengesetze“ versteht, sondern um eine lokale Begründung eines Rechenschritts durch eine auswendig gelernte Regel.

Die **Mikrowelt „Bewegungsspiel“** wird nur einmal zu Hilfe genommen:

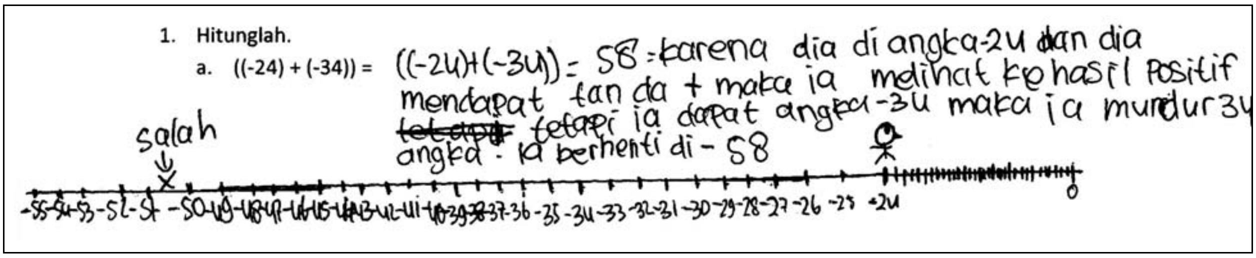

Abb. 8: Addition von zwei ganzen Zahlen, Begründung des Ergebnisses in der Mikrowelt Bewegungsspiel

[Er war auf –24 und er bekommt auf dem Zeichenwürfel ein +, also guckt er in die positive Richtung. Danach hat er auf dem Zahlenwürfel eine –34. Also geht er 34 rückwärts. Er stoppt bei –58.]

Der Schüler Dodi überträgt den ersten Summanden korrekt in eine Position der Spielfigur „Er war auf –24“, das Funktionszeichen der Addition korrekt auf eine Position des Funktionszeichenwürfels „er bekommt auf dem Zeichenwürfel ein +“. Dies wird korrekt in eine Drehung der Spielfigur umgesetzt „also guckt er in die positive Richtung.“ Der zweite Summand wird ebenfalls korrekt in eine Position des Zahlenwürfels umgesetzt „Danach hat er auf dem Zahlenwürfel eine –34“ und dieser wiederum in eine Bewegung der Spielfigur „Also geht er 34 rückwärts.“ Die Endposition der Spielfigur ist korrekt ermittelt „Er stoppt bei –58“.

Seine bildliche Darstellung zeigt die Startposition des Spielzuges mit der Spielfigur. Dann ermittelt er auf nicht nachvollziehbare Weise, dass er das Kreuz auf -52 setzen muss. Er bemerkt seinen Fehler und kennzeichnet sein bei -52 gesetztes Kreuz als falsch „salah“. An dieser Stelle hat er also seine Tätigkeit überwacht.

Bei der algebraischen Darstellung (in der ersten Zeile) überwacht er dagegen seine Tätigkeit nicht: Er schreibt als Ergebnis der Rechnung 58, obwohl 58 weder in seiner Zeichnung noch in seiner Verbalisierung des Spielzugs vorkommt.

Bei der in der Aufgabenstellung geforderten Rechnung mangelt es ihm also nicht an der zu Grunde liegenden Vorstellung, sondern an der Überwachung der Übertragung des in der Mikrowelt korrekt ermittelten Ergebnisses in eine algebraische Darstellung.

Dass nur so wenige Schüler das Bewegungsspiel als Grundvorstellung für die Rechnungen nehmen, mag durch die großen Zahlen und den damit verbundenen hohen Aufwand, die Zahlenlinie zu zeichnen, begründet sein. Im Unterricht war das Bewegungsspiel zum Aufbau einer zweiten Vorstellungswelt sehr nützlich, aber für die rechentechnische Anwendung ist offensichtlich die Mikrowelt „Vertragswerk“ gerade wegen ihren formalen Kompaktheit leichter handhabbar.

Hypothese 4: Schüler, die bei den technischen Aufgaben (Aufgabe 1a – 1d) wenigstens einmal durch einen Kommentar zeigen, dass sie beim Rechnen auf eine Mikrowelt zurückgreifen, rechnen zuverlässiger.

7 von 67 Schülern zeigen durch mindestens einen Kommentar, dass sie beim Rechnen auf eine Mikrowelt zurückgreifen. Von den 28 von ihnen bearbeiteten Teilaufgaben sind 25 (89 %) richtig gelöst. Bei weiteren zwei Aufgabenteilen liegt ein Abschreibfehler von der in der Mikrowelt richtig ermittelten Lösung in die algebraische Darstellung (vgl. Abb. 8) vor. Für die Auswertung werden sie trotzdem als „falsch“ bewertet. Bei den übrigen 60 Schülern sind von den 240 Teilaufgaben 145 (60 %) richtig gelöst.

Die Hypothese ist bestätigt. Trotz der geringen Anzahl an Versuchspersonen ist das Ergebnis statistisch signifikant ($t(17{,}16)=2{,}36$, $p<0{,}05$). Das zeigt, dass es sich lohnt, diese Fragestellung in einer Pilotstudie detailliert zu verfolgen.

Die Erklärung für die bessere Leistung sehen wir darin, dass das unaufgeforderte Zurückgreifen auf geeignete Mikrowelten als Indikator für dahinter liegende Monitoring- und Reflexionsprozesse gewertet werden kann, von denen in der Literatur bekannt ist, dass sie die Lösungshäufigkeiten steigern.

Während die bisherigen Hypothesen eher die technischen Fertigkeiten der Schüler betrafen, zielen die nächsten Hypothesen eher auf das mathematische Argumentieren der Schüler ab.

Hypothese 5: Schüler der Versuchsklasse können besser mathematisch argumentieren als Schüler der Kotrollklasse.

Um dieser Hypothese nachzugehen haben wir eine Analyse der Bearbeitungen der dritten Aufgabe vorgenommen. In dieser sollte die Aussage des Gesetzes (0 + a) = a erläutert werden. Die Schüler der Versuchsklasse haben mit einem Mittelwert von 2,88 von maximal 4 Punkten ein signifikant besseres Ergebnis erzielt als die Schüler der Kontrollklasse mit 1,23 ($t(55) = 3.848$, $p<0.05$). Dies zeigt, dass die den Schülern der Versuchsklasse angebotenen Mikrowelten sich von denen zu eigen gemacht worden sind und sie eher in die Lage versetzen, mathematisch zu argumentieren:

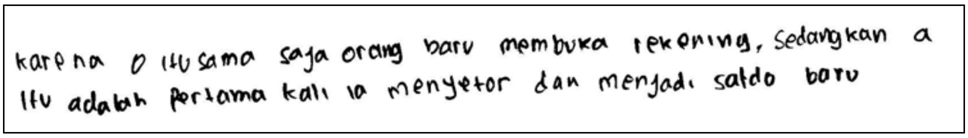
karena 0 itu sama saja orang baru membuka rekening, sedangkan a
itu adalah pertama kali ia menyetor dan menjadi saldo baru

Abb. 9: Hosyes Erklärung des Rechengesetzes in der Mikrowelt „Buchen“

[Denn 0 ist das Gleiche, wie man ein Konto eröffnet, während a der erste Betrag von Einzahlung ist und das der neue Saldo wird.]

Hosye ruft beim Lesen der Gleichung die Mikrowelt „Buchen von Guthaben und Schulden“ auf. Die Gleichung beschreibt für sie den Vorgang der ersten Buchung nach einer Kontoeröffnung.

In Ninas Erklärung ist dagegen kein Hinweis auf die Mikrowelt „Buchen“ zu finden, sondern auf die der „Vertragswerke“.

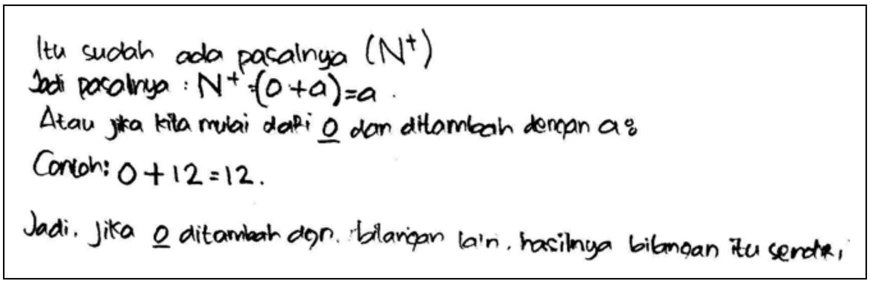
Itu sudah ada pasalnya (N^+)
Jadi pasalnya : $N^+ (0+a)=a$.
Atau jika kita mulai dari 0 dan ditambah dengan a?
Contoh: $0+12=12$.
Jadi, jika 0 ditambah dgn. bilangan lain, hasilnya bilangan itu sendiri,

Abb. 10: Nina verweist auf den Gesetzescharakter

[Das ist Satz (N^+)
Der Satz lautet: $N^+= (0+a)=a$]

Aus dieser Mikrowelt stammt auch der in der Klasse vereinbarte Name N+ des Paragraphen.

Auf diesen Paragraphen N+ verweisen immerhin 15 der 29 Schüler aus der Versuchsklasse. Somit ist die Mikrowelt „Vertragswerk“ die am häufigsten genannte im Zusammenhang mit der geforderten Erklärung für ein Rechengesetz.

In der Bearbeitung von Panta kommt zum Ausdruck, dass die Mikrowelt „Vertragswerk“ nicht zusammenhangslos neben der Mikrowelt „Buchen“ steht, sondern vielmehr, dass sie aus der Mikrowelt „Buchen“ weiter entwickelt worden ist. Weil sie sich darauf bezieht, dass Verträge dazu da sind, Verhalten zu regeln, ist diese Äußerung ein Zeichen dafür, dass sie wirklich verstanden hat, was mit vertragsgemäßem Rechnen gemeint ist.

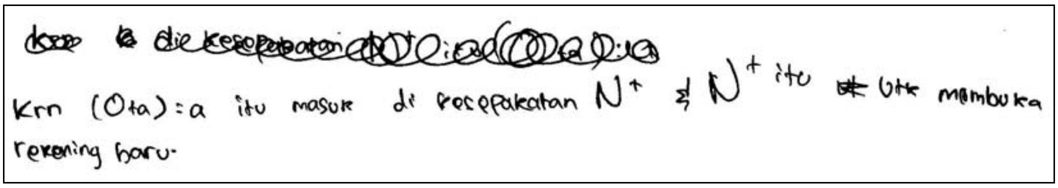

Abb. 11: Panta verweist auf den Vertragscharakter, aber auch auf den Zweck des vereinbarten Paragraphen in der Mikrowelt „Buchen“

[Denn (0+a) = a ist der Vertrag N^+ und N^+ ist für die Eröffnung eines neuen Kontos.]

Erklärungsmöglichkeiten, wie sie die drei vorstehenden Schülerlösungen zeigen, greifen auf die im Projektunterricht mit der Lernumgebung eingeführten Mikrowelten zurück. Sie stehen den Schülern der Kontrollklasse nicht zur Verfügung. Diesen blieb zur Erklärung ein Rückgriff auf die Einführungsbeispiele im Schulbuch (Umgang mit Skalen), eine umgangssprachliche Beschreibung der Eigenschaft der Zahl 0 als neutrales Element der Addition oder ein direkter Verweis auf das im eingeführten Schulbuch (Adinawan et al.,2006, S. 10) in einem Kasten vermerkten Gesetz.

6 der 28 Schüler der Kontrollklasse bearbeiteten die Aufgabenstellung nicht passend, haben sie also vermutlich nicht verstanden.

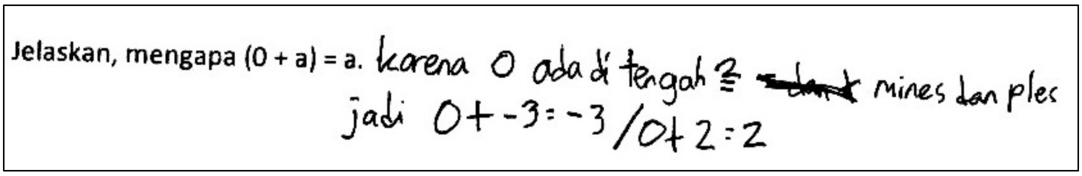

Abb. 12: Beispiel für eine inkonsistente Erläuterung eines Schülers aus der Kontrollklasse

[Weil 0 zwischen minus und plus ist. Also 0 + -3 = -3 / 0 + 2 = 2]

Der erste Teil von Hugos Äußerung „Weil 0 zwischen minus und plus ist.“ bezieht sich vermutlich auf die Positionierung von Null auf dem Zahlenstrahl zwischen positiven und negativen Zahlen. Bei den darauf folgenden Rechenbeispielen ist aber kein Bezug zu der ersten Aussage zu erkennen.

12 Schüler haben die Gleichung lediglich verbalisiert, aber die Aussage dabei nicht erklärt. Zwei Schüler gaben ein Beispiel für den formalisierten Sachverhalt an.

Nur 8 Schüler gaben eine zur Aufgabenstellung passende Antwort, wie Sebatinus

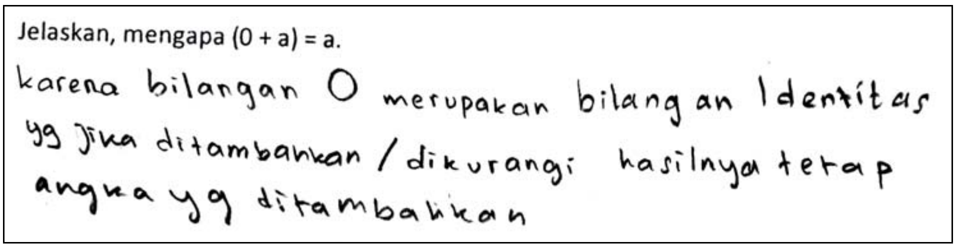

Abb. 13: Sebatinus:

Weil Null neutral ist.
[Wenn (Null) mit anderer Zahl addiert/subtrahiert wird, ist das Ergebnis die Zahl, die addiert wird.]

oder Agustina:

Jelaskan, mengapa (0 + a) = a.

Karena, jika bilangan apa saja ~~penjumlahan~~, di jumlahkan dengan nol (0) maka hasilnya tetap bilangan itu sendiri.

Abb. 14: Augustina verbalisiert die Aussage in der Umgangssprache.

[Denn, wenn wir die beliebige Zahl mit 0 addieren, das Ergebnis die Zahl ist.]

Sebatinus und Augustinas Antworten deuten wir als adäquate Verbalisierung des im eingeführten Schulbuch (Adinawan et al., 2006, S. 10) in einem Kasten vermerkten Gesetzes.

Keiner der Schüler der Kontrollklasse greift bei seiner Erklärung auf die Einführungsbeispiele zum Umgang mit den ganzen Zahlen (Skalen) aus dem Schulbuch zurück. Diese tragen also bei diesen Schülern nicht dazu bei, die Rechengesetze zu erläutern. Auch in den von uns analysierten Schulbüchern (Adinawan et. al., 2006 und Marsigit, 2008) werden die Einführungsbeispiele zwar zur Erklärung der Existenz von ganzen Zahlen, aber zur Erläuterung von Rechengesetzen dann nicht mehr herangezogen.

Festhalten lässt sich: Deutlich mehr Schüler der Versuchsklasse als in der Kontrollklasse (15 von 29 gegenüber 8 von 28) können sich bei ihrer mathematischen Argumentation sinnvoll auf einen Paragraphen bzw. auf ein Rechengesetz berufen. Dazu kommen in der Versuchklasse noch 5 Schüler, die sich beim Argumentieren nur auf die Mikrowelt „Buchen" beziehen.

Insgesamt zeigt die Auswertung zu Hypothese 5, welch großes Potential die Innovation für das mathematische Argumentieren bereithält.

Die Bemühungen um eine Veränderung in der Unterrichtskultur sollten Spuren in den Bearbeitungen der Schüler hinterlassen. Ein zentrales Bemühen der Lehrkraft im Projektunterricht war, die Schüler jeweils zu einer Begründung ihrer Äußerungen anzuhalten und diese oftmals auch zu verschriftlichen. Ob sich dieses Training als positiver Effekt niederschlägt, sollte mit Aufgabe 4 überprüft werden.

Hypothese 6: Schüler der Versuchsklasse können besser komplex mathematisch argumentieren als Schüler der Kontrollklasse

Bei der Bearbeitung der Aufgabe

Ein Schüler hat vergessen, was die Gegenzahl von (-17) ist.
Er überlegt, ob es 17 oder (- (-17)) ist. Was meinst du dazu?

musste folgende komplexe Argumentationen durchgeführt werden: gemäß dem Vorgehen im Unterricht der Versuchsklasse erhält man die Gegenzahl zu einer Zahl dadurch, dass man ein Minuszeichen davor schreibt und klammert, also aus (-17) die Zahl (- (-17)) macht. Andererseits wurde im Unterricht der Satz bewiesen, dass (-(-a)) = a gilt. Deshalb wissen wir, dass

(-(-17)) = 17. Also ist die direkt konstruierte Gegenzahl von (-17) die Zahl (- (-17)), von der wissen wir aber, dass sie gleich 17 ist.

Eine ähnliche Argumentation hätte ein Schüler der Kontrollklasse auch an Hand der Rechengesetze im eingeführten Schulbuch ausführen können.

Voraussetzung für die geforderte Argumentation ist, dass ein Schüler sowohl 17 als auch (-(-17)) als Gegenzahl von (-17) nennt. In der Versuchsklasse tun dies 9 von 29 Schülern, in der Kontrollklasse 2 von 28. Einen großen Unterschied gibt es auch darin, dass für das Nennen einer Gegenzahl eine Begründung gegeben wird. Die Feinheit in der Argumentation, dass es sich einmal um eine Definition und einmal um einen bewiesenen Satz handelt, nennt kein einziger Schüler. In beiden Klasen fällt auf, dass die Schüler auf die logische Struktur der Doppelfrage oft nicht adäquat antworten, weil sie ihre Äußerung mit „Ja richtig.“ beginnen. Dieses werten wir als Indikator dafür, dass im indonesischen Unterricht viel zu oft nur mit ja/nein zu beantwortende Fragen gestellt werden.

Die Auswertung der Aufgabe 4 zeigt also, dass es lohnenswert ist, eine solche Aufgabe in die Pilotstudie aufzunehmen.

AUSBLICK

Als Ergebnis der Machbarkeitsstudie lässt sich feststellen, dass eine breiter angelegte Pilotstudie mit dem konzipierten Design Erfolg versprechend ist. Insbesondere zeigten sich Gelegenheiten, das Verständnis der Schüler für mathematische Begriffsbildungen und ihre Kompetenz zum Argumentieren deutlich zu erhöhen. Deshalb wurde bei der katholischen Hilfsorganisation MISEREOR in Deutschland ein Antrag auf finanzielle Unterstützung für eine solche Pilotstudie gestellt. Mehrere Schulen aus Mitteljava haben ihr Interesse an einer Teilnahme bekundet. Deswegen hat MISEREOR den Antrag mittlerweile bewilligt. Das Pilotprojekt hat am 01.04.2011 begonnen.

LITERATUR

Adinawan, M. Cholik et. al. (2006). *Mathematika untuk SMP KELAS VII Semester 1A*. Jakarta: Erlanger.

Kaune, C. & Cohors-Fresenborg, E. (2011). Perjanjian untuk Berhitung. Buku Kerja untuk Siswa Kelas 7. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Kaune, C., Cohors-Fresenborg, E. & Nowinska, E. (2011). Development of metacognitive and discursive activities in Indonesian Maths Teaching. A theory based design and test of a learning environment. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education (IndoMS - JME)* 2(1): 15-39.